Опр.1. Пространством $\mathbb{R}^n$ (n-мерным действительным пространством) наз-ся мн-во всех наборов вида $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $x_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$, с введенной на нем структурой линейного пр-ва относительно операций сложения: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ и умножения на скаляр: $\alpha\vec{x}=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Это пр-во явл-ся евклидовым относительно скалярного произведения $(\vec{x},\vec{y}):=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$.
На нем можно ввести норму (длину) $\|\vec{x}\|:=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ и метрику (расстояние) $\rho(x,y):=\|\vec{x}-\vec{y}\|=$ $=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$

Элементы пр-ва $\mathbb{R}^n$ будем называть точками (векторами)

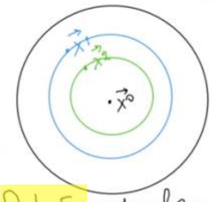
Опр.2 Пусть $\varepsilon>0$. ε-окрестностью точки $\vec{x}^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ в $\mathbb{R}^n$ наз-ся мн-во $B_\varepsilon(\vec{x}^0)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\rho(\vec{x},\vec{x}^0)=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2}<\varepsilon\}$

Опр.3 Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$. Точка $\vec{x}^0$ наз-ся внутренней точкой множества A, если $\exists\varepsilon>0: B_\varepsilon(\vec{x}^0)\subset A$.
$\vec{x}^0$ наз-ся внешней точкой A, если $\exists\varepsilon>0: B_\varepsilon(\vec{x}^0)\subset(\mathbb{R}^n\setminus A)$.

Точка $\vec{x}^0$ наз-ся граничной точкой A, если $\forall\varepsilon>0$: $B_\varepsilon(\vec{x}^0)\cap A\neq\varnothing$ и $B_\varepsilon(\vec{x}^0)\cap(\mathbb{R}^n\setminus A)\neq\varnothing$.

Опр.4 Точка $\vec{x}^0$ наз-ся предельной точкой мн-ва A, если $\forall\varepsilon>0$ в $B_\varepsilon(\vec{x}^0)$ содержится бесконечно много элементов мн-ва A. Или, эквивалентно, $\forall\varepsilon>0$: $\mathring{B}_\varepsilon(\vec{x}^0)\cap A\neq\varnothing$.

Док-м экв-ть. (⇒) очевидно, т.к. в любой окр-ти беск. много точек ⇒ в ∀ проколотой окр-ти беск. много точек.
(⇐) Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists\vec{x}^1\in\mathring{B}_\varepsilon(\vec{x}^0)\cap A$.



Положим $\varepsilon_1=\rho(\vec{x}^0,\vec{x}^1)>0$. $\exists\vec{x}^2\in\mathring{B}_{\varepsilon_1}(\vec{x}^0)\cap A$. $\neq\vec{x}^1$
Положим $\varepsilon_2=\rho(\vec{x}^0,\vec{x}^2)>0$. $\exists\vec{x}^3\in\mathring{B}_{\varepsilon_2}(\vec{x}^0)\cap A$ $\neq\vec{x}^2$
И т.д., получим беск. много различных точек $\vec{x}^n\in B_\varepsilon(\vec{x}^0)\cap A$.

Опр.5 Мн-во $A\subset\mathbb{R}^n$ наз-ся открытым, если все его точки — внутренние. Мн-во $A\subset\mathbb{R}^n$ наз-ся замкнутым, если мн-во $\mathbb{R}^n\setminus A$ открыто.

Опр.6 Мн-во $A\subset\mathbb{R}^n$ наз-ся ограниченным, если $\exists R>0$: $A\subset B_R(0)$.

Точки по отношению к мн-ву A

- внутренние
  - предельные
- внешние
- граничные
  - предельные
  - изолированные

Утв.1 Следующие утв-я эквивалентны:
1) Мн-во A замкнуто;
2) мн-во A содержит все свои предельные точки;
3) мн-во A содержит все свои граничные точки.

Опр.7 n-мерным открытым шаром с центром в точке $\vec{x}^0$ радиуса R наз-ся мн-во $B_R(\vec{x}^0)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\rho(\vec{x},\vec{x}^0)<R\}$. Мн-во $\overline{B}_R(\vec{x}^0)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,\rho(\vec{x},\vec{x}^0)\le R\}$ — замкнутый n-мерный шар. Мн-во $S_R(\vec{x}^0)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,\rho(\vec{x},\vec{x}^0)=R\}$ — n-мерная сфера.
Пусть $d_1,\dots,d_n>0$. Мн-во $\Pi_{d_1,\dots,d_n}(\vec{x}^0)=\{\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,|x_1-x_1^0|<d_1,\dots,|x_n-x_n^0|<d_n\}$ — n-мерный параллелепипед.

Опр.8 Последовательностью в $\mathbb{R}^n$ наз-ся отображение $\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$. Будем также называть послед-тью образ при этом отображ-и, т.е. мн-во $\{\vec{x}^m\}_{m=1}^{+\infty}$, где $\vec{x}^m=(x_1^m,\dots,x_n^m)\in\mathbb{R}^n$, $m\in\mathbb{N}$.

Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ сходится к точке $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N$: $\rho(\vec{x}^m,\vec{a})<\varepsilon$.
Пишут: $\lim\limits_{m\to+\infty}\vec{x}^m=\vec{a}$ или $\vec{x}^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}\vec{a}$.
Будем говорить, что $\vec{x}^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}\infty$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N$: $\|\vec{x}^m\|>\frac{1}{\varepsilon}$.

Лемма 1 Посл-ть $\vec{x}^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}\vec{a}\in\mathbb{R}^n\iff\begin{cases}x_1^m\to a_1\\ \vdots\\ x_n^m\to a_n\end{cases}$, $m\to+\infty$.

Д-во: (⇒) Возьмем $\varepsilon>0$. $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N$, $\forall k\in\{1,\dots,n\}$:
$|x_k^m-a_k|\le\sqrt{(x_1^m-a_1)^2+\dots+(x_n^m-a_n)^2}=\rho(\vec{x}^m,\vec{a})<\varepsilon$
⇒ $x_k^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}a_k$, $k=1,\dots,n$.
(⇐) Возьмем $\varepsilon>0$. Пусть $k\in\{1,\dots,n\}$. $\exists N_k(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N_k$: $|x_k^m-a_k|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Положим $N=\max\{N_1,\dots,N_n\}$, тогда $\forall m\ge N$: $\rho(\vec{x}^m,\vec{a})=\sqrt{\underbrace{(x_1^m-a_1)^2}_{<\varepsilon^2/n}+\dots+\underbrace{(x_n^m-a_n)^2}_{<\varepsilon^2/n}}<\varepsilon$ ⇒ $\vec{x}^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}\vec{a}$ ч.т.д.

Опр.9 Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ наз-ся фундаментальной, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N$, $\forall p\in\mathbb{N}$: $\rho(\vec{x}^{m+p},\vec{x}^m)<\varepsilon$.

Лемма 2. Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ фунд-на ⇔ все посл-ти $\{x_k^m\}$, $k=1,\dots,n$, явл-ся фундаментальными.

Д-во: (⇒) Возьмем $\varepsilon>0$, $k\in\{1,\dots,n\}$, тогда $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N$, $\forall p\in\mathbb{N}$: $|x_k^m-x_k^{m+p}|\le\rho(\vec{x}^{m+p},\vec{x}^m)<\varepsilon$
⇒ $\{x_k^m\}$ фунд-на.
(⇐) Пусть $\varepsilon>0$, $k\in\{1,\dots,n\}$ ⇒ $\exists N_k(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, т.ч. $\forall m\ge N_k$, $\forall p\in\mathbb{N}$: $|x_k^m-x_k^{m+p}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Пусть $N=\max\{N_1,\dots,N_n\}$, тогда $\forall m\ge N$: $\rho(\vec{x}^m,\vec{x}^{m+p})<\varepsilon$. ч.т.д.

Т.1 (критерий Коши сх-ти посл-ти в $\mathbb{R}^n$). Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ сх-ся ⇔ она фундаментальна.

Д-во: $\{\vec{x}^m\}$ сх-ся $\overset{\text{Л.1}}{\iff}$ $\{x_1^m\},\dots,\{x_n^m\}$ сходятся $\iff$ (кр. Коши для числовых посл-тей) $\{x_1^m\},\dots,\{x_n^m\}$ фунд-ны $\overset{\text{Л.2}}{\iff}$ $\{\vec{x}^m\}$ фунд-на. ч.т.д.

Т.2 (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной послед-ти $\{\vec{x}^m\}$ в пр-ве $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпосл-ть.

Д-во: Посл-ть $\{\vec{x}^m\}$ ограничена ⇒ каждая из посл-тей $\{x_1^m\},\dots,\{x_n^m\}$ ограничена.
Рассм. посл-ть $\{x_1^m\}$. Она ограничена ⇒ из неё можно выделить сх-ся подпосл-ть $x_1^{m_{k_1}}\xrightarrow[k_1\to+\infty]{}a_1$.
Рассм. теперь посл-ть $\{x_2^{m_{k_1}}\}_{k_1=1}^{+\infty}$. Она огр-на ⇒ из неё можно выделить сх-ся подпосл-ть $x_2^{m_{k_2}}\xrightarrow[k_2\to+\infty]{}a_2$.
И т.д., наконец, из $\{x_n^{m_{k_{n-1}}}\}$ выделим сх-ся $x_n^{m_{k_n}}\xrightarrow[k_n\to+\infty]{}a_n$. Тогда посл-ть $\vec{x}^{m_{k_n}}\to\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$
(т.к. $x_n^{m_{k_n}}\to a_n$, $x_{n-1}^{m_{k_n}}\to a_{n-1},\dots,x_1^{m_{k_n}}\to a_1$) ч.т.д.